

О ПОСТРОЕНИИ АППРОКСИМАЦИЙ НЕВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ПРИ ПОМОЩИ КУСОЧНО-КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Маянцев Кирилл Сергеевич

Аспирант

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: kirill.mayantsev@yandex.ru

Данная работа посвящена построению внешних аппроксимаций невыпуклых множеств следующего вида:

$$\mathcal{X} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{E}_i = \mathcal{E}(q_i, Q_i), \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где $\mathcal{E}(q, Q)$ — эллипсоид с центром q и матрицей формы Q . Будем считать, что \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 не пересекаются.

Функцию $V(x)$, линии уровня которой аппроксимируют множество \mathcal{X} , выберем из класса кусочно-квадратичных функций. Такой тип аппроксимаций позволяет решать задачи построения внутренних оценок множеств достижимости систем с кусочно-линейной структурой и невыпуклыми ограничениями на фазовые переменные (см. [2]).

Кусочно-квадратичная функция $V(x)$ имеет следующий вид:

$$V(x) = \begin{cases} \langle \tilde{x}, \tilde{F}_1^\top P \tilde{F}_1 \tilde{x} \rangle, & x \in \Omega_1, \\ \langle \tilde{x}, \tilde{F}_2^\top P \tilde{F}_2 \tilde{x} \rangle, & x \in \Omega_2, \end{cases} \quad (2)$$

где $\tilde{x} = (x, 1)^\top$, эллипсоиды \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 принадлежат Ω_1 и Ω_2 соответственно, $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \mathbb{R}^n$. В качестве областей Ω_1 и Ω_2 рассматриваются полупространства, разделённые некоторой гиперплоскостью H .

Будем рассматривать кусочно-квадратичные функции $V(x)$ специального вида (см. [1]), которые являются всюду непрерывными и дифференцируемыми по направлениям. Требуется не только найти такую функцию $V(x)$, множества уровней которой аппроксимируют множество \mathcal{X} , но и решить задачу минимизации суммарной погрешности аппроксимации, равной максимуму разности модулей собственных значений эллипсоидов \mathcal{E}_i и соответствующих им аппроксимирующих эллипсоидов, являющихся множествами единичного уровня функции (2).

В работе в явном виде выписаны ограничения, связывающие матрицы, задающие кусочно-квадратичную функцию $V(x)$, с поло-

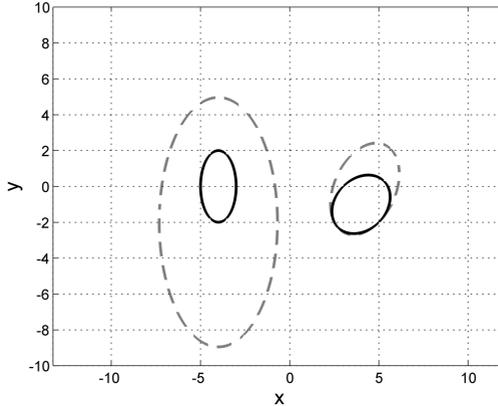
жением гиперплоскости переключений H , определяющей структуру кусочно-линейной системы (см. [1]). Также введены дополнительные параметры, позволяющие описать семейство кусочно-квадратичных функций $V(x)$, аппроксимирующих извне заданное невыпуклое множество. На этом семействе решена задача минимизации погрешности аппроксимации.

Иллюстрации

Для эллипсоидов \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , параметры которых таковы:

$$q_1 = (-4, 0)^T, \quad q_2 = (4, -1)^T, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

имеем следующую аппроксимацию:



Пунктиром выделено множество точек единичного уровня функции $V(x)$, сплошными линиями изображены эллипсоиды \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 .

Литература

1. Точилин П. А. О построении невыпуклых аппроксимаций множеств достижимости кусочно-линейных систем. // Дифференциальные уравнения, 2015 г. (в печати).
2. A. B. Kurzhanski, I. M. Mitchell, P. Varaiya. Optimization Techniques for State-Constrained Control and Obstacle Problems. // Journal of Optimization Theory and Applications: Vol. 128, № 3, pp. 499–521, 2006.